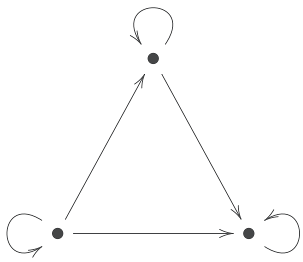
Росен Люцканов

ЛИЦАТА НА ПРОТЕЙ

увод в концептуалната математика



Изток-Запад
София, 2013

ISBN 978-619-152-256-9

MSC 2010: 00A30, 03G30, 18A15.

Росен Люцканов

Лицата на Протей

Българска, първо издание

Рецензенти	**доц. Доротея Ангелова**
	доц. Николай Обрешков
Оформление на корицата	**Деница Трифонова**
формат	**8/60/90**
обем	**38 п.к.**
дадена за печат	**юли 2013**
излязла от печат	**юли 2013**
Предпечат и печат	**Изток-Запад**

1124 София, жк „Яворов", бл. 1, ап. 3
тел.: (02) 946 35 21
e-mail: iztok.zapadbg@gmail.com
iztok_zapad@abv.bg

www.iztok-zapad.eu

Предговор

Предговорът е мястото, в което една книга трябва да заяви своите основания за съществуване. Иначе казано, на него се полага да даде отговор на два вътрешно свързани въпроса: „Как стана така, че бях написана?“ и „Защо трябва да бъда прочетена?“. Първият от тях препраща към една история, която започва в (не)далечната 2007 година, когато завършвах докторската си дисертация[1]. В нея ставаше дума за един от най-обсъжданите резултати в съвременната математическа логика - теоремата за непълнота, която демонстрира, че при обширен клас от формални системи се наблюдава разминаване между синтактичното понятие за доказуемост и семантичното понятие за истинност (вж. последния параграф в четвърта глава на настоящата книга). Една от целите ми беше да покажа, че очертаването на границата между доказуемост и истинност, както и опитите за нейното преодоляване, до голяма степен са определящи за развитието на логиката през следващите десетилетия. Очевидно, когато е налице граница, тя може да бъде прекрачена във всяка от двете посоки; съответно, съвпадение между истинност и доказуемост можем да постигнем като модифицираме понятието за доказателство, или като преминем към нов тип семантика. Първата от тези две стратегии се радва на много по-голяма популярност, но все пак са известни и опити от втория тип. Един от тях е представен в забележителна статия (Awodey and Reck 2002), чиито автори показват, че ограниченията, наложени от теоремата за непълнота, все пак са преодолими. За целта обаче е нужно да интерпретираме математическите твърдения като отнасящи се не до множества, а до така наречените „снопове“ (sheaves).

За мое нещастие, скоро стана очевидно, че е практически невъзможно да вникна в съдържанието на споменатата статия. Тя използваше непознат за мен език, развит в рамките на относително нова математическа дисциплина, наречена „теория на категориите“. Опитите ми да усвоя този език претърпяха пълен провал и причината беше не просто езикът, а свързаният с него начин на мислене. През изминалите години се опитах да усвоя този нов концептуален инструмент, да се науча да виждам света на математиката по нов начин. Настоящият текст документира резултатите от тези мои опити. Причината, поради която се надявам, че той може да представлява някакъв интерес, е свързана с убеждението ми, че трудностите, на които се натъкнах, или дори грешките, които със сигурност съм допуснал, са типични за всеки чужденец, който за пръв път навлиза в тази част от света на съвременната математика. Тя се ражда преди около двадесет и пет века като наука, в чиято основа са положени интуитивно достоверни и подлежащи на сетивно онагледяване твърдения, изразяващи в абстрактна форма множество от емпирично проверими закономерности, но понастоящем е трудно обозрима съвкупност от различни теории, повечето от които съзнателно избягват позоваването на интуицията и боравят с твърдения, които не са нито сетивно онагледими, нито емпирично проверими. Промяната очевидно е толкова дълбока, че ако все пак остава незабелязана, това е единствено благодарение на обстоятелството, че се е случила изключително бавно - Евклид не е съвременник на Хилберт, но между тях е налице непрекъсната верига от посредници, която свързва „Елементите“ на първия с „Основите“ на втория. Предстои да се убедим, че теорията на категориите е показателен пример за всичко онова, което отличава „старата“ от „новата“ математика.

Преди всичко, теорията на категориите е *обща* теория, синтезираща резултатите на частните математически дисциплини - топология и алгебра, логика и геометрия. Всички нейни твърдения са формулирани с точност до изоморфизъм, което означава, че те са изпълнени за произволна система от обекти, които реализират съответната структура. При това, няма никакво значение, дали тези обекти са естествени числа, векторни пространства или логически пропозиции - всяка дефиниция, конструкция или теорема, доказана в рамките на теорията на категориите, може безпроблемно да бъде „пренесена“ в съответната частна математическа теория. По-нататък, теорията на категориите е *абстрактна* теория, която не взема предвид специфичния характер на изследваните обекти. Нейният предмет е фиксиран чрез аксиоматична дефиниция, изразена на формален език, допускащ различни интерпретации и приложим при изследването на множество конкретни системи. Това по принцип изключва възможността да намерим някакво интуитивно съдържание, скрито зад видимостта на формулите. Дори би могло да се каже, че е погрешно да питаме за какво „в действителност“ става дума в теорията на категориите. Накрая, по силата на вече казаното може да се твърди, че теорията на категориите е *безсмислена.*

---

[1] Публикувана от издателство „Изток-Запад“ под заглавието *Теоремата за непълнота: контексти на интерпретация* (2008).

Ако критерий за смисленост е способността ни да открием определен дял от реалността, към който се отнася съответното твърдение, то теорията на категориите наистина е лишена от смисъл. Както вече стана дума, тя осигурява такава математическа форма, която сама по себе си е „празна“ (несвързана с конкретно интуитивно, частно математическо или емпирично локализирано съдържание), но тъкмо благодарение на това може да приеме в себе си произволно съдържание. Ето защо, самите създатели на теорията на категориите, Самуел Айленберг и Сондърс Мак Лейн, обобщават тези нейни специфични черти, като шеговито я именуват „обща теория на абстрактните безсмислици“. Наистина, както по-късно си спомня Мак Лейн, „по това време понякога определяхме нашата тема като обща абстрактна безсмислица (*general abstract nonsense*), макар да не вземахме насериозно определението безсмислица и да се гордеехме с нейната общност“ (Mac Lane 2005, 125-126). Много години по-късно, Мак Лейн открива една прекрасна метафора, изказваща лаконично всичко казано до този момент: „Математиката има протейски характер, тъй като една и съща математическа структура има множество различни емпирични реализации“ (Mac Lane 1992, 3). Както подсказва името му, морският старец Протей е един от най-старите богове в гръцката митология. Неговите отличителни черти са две: той никога не лъже и е способен да приеме формата на всяко живо същество или неодушевен предмет. По същия начин, математиката е най-древната човешка наука. Освен това, тя винаги казва истината, тъй като доказаните по математически път твърдения са образец за необходимо и сигурно знание. Накрая, математическите структури могат да бъдат облечени в осезаема плът по много различни начини, разкривайки неочаквани закономерности и връзки между материалния свят на конкретните обекти и безплътните светове на абстрактните обекти. Ето защо, аналогията между математиката и Морския старец е всичко друго, но не и произволна.

Така стигаме до втората част от заглавието, съдържаща непривичното определение „концептуална математика“. Ако математиката не беше променила напълно своя облик през изминалите столетия, то подобна фраза вероятно щеше да бъде безсмислена. Наистина, по силата на традиционното разделение на труда, математиката доскоро се занимаваше не с понятия, а с числа и геометрични фигури. От друга страна, работата с понятия беше запазена територия на метафизичното мислене. Още преди появата на теорията на категориите обаче, това разделение вече не е приложимо на практика, тъй като една от отликите на модерната математика е това, че „методите, техниките и инструментите, разработени в нейните рамки, сами се превръщат в обекти на знание“[2]. Благодарение на това още през втората половина на XIX век е демонстрирано на практика, че самите математически структури могат да се разглеждат като обект, в чието изследване са приложими математически методи. Ето защо, както пояснява известният финландски логик Яко Хинтика, „концептуалната математика характеризира и изследва различни видове структури, както и понятията, които са нужни, за да говорим за тях“[3]. Иначе казано, сред задачите на днешната математика е сама да изработва и легитимира своите собствени концептуални инструменти. Тъкмо по тази причина, Уилям Лавер нарича своето популярно въведение в теорията на категориите „Концептуална математика“ (Lawvere and Shanuel 1997) - тук е изложена вътрешно съгласувана система от понятия, в която са изразими идеите, положени в основата на елементарната математика. Самата теория на категориите може да се разглежда като аналогичен опит същото да бъде направено по отношение на *цялата* математика.

Надявам се, че казаното до този момент дава достатъчно изчерпателен отговор на въпроса „как?“. Така стигаме до въпроса „защо?“, чийто отговор може да бъде разделен на две части. Първо, налице са достатъчно основания да смятаме, че теорията на категориите сама по себе си е полезен инструмент, който може да бъде използван от логици, физици, програмисти и философи (без да допускам, че този списък е изчерпателен). Основанията за това са посочени в четвърти параграф на първа глава. Там е показано накратко какви са нейните приложения в съответните научни области, простиращи се от абстрактната теория на моделите, формализма на квантовата механика и семантиката на програмните езици до въпроса за онтологията на математическите теории и динамиката на политическите процеси. Второ, теорията на категориите се ражда в контекста на една специфична математическа теория - хомологичната алгебра - и все още носи родилни белези, които нагледно доказват това. Повечето от известните ми въвеждащи изложения я представят като концептуален инструмент на работещия

[2] Вж. Marquis, J.-P. 2006. A path to the epistemology of mathematics: homotopy theory. In: Ferreiros, J. and J. Gray (eds.), *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*, p. 241. Oxford: Oxford University Press.

[3] Вж. Hintikka, J. 2011. What is the axiomatic method? *Synthese 183*, 69-85.

математик, привеждайки множество примери от топологията, алгебрата и геометрията. Обикновено основните понятия и конструкции се поясняват пределно лаконично, при това именно чрез такива примери. Тук се опитах да избегна тази хронична прибързаност, предлагайки на вниманието на читателя изложение, което в минимална степен предполага наличието на предварителни познания в една или друга математическа дисциплина. Друга особеност на наличните въведения, която е пряко свързана с предишната, се отнася до начина, по който са представени доказателствата на основните теореми. Много от тях често биват излагани схематично, или дори пропускани изцяло, като безпомощният читател е оставен сам да се „упражни" с тях. Постарал съм се тук да не срещнете *нито едно* твърдение, начините за чието обосноваване да не са достатъчно изчерпателно описани[4]. Този аспект има и концептуално значение: смисълът на дадено понятие или конструкция се разкрива в неговата връзка с останалите понятия и конструкции в съответната математическа теория, а доказателствата са нашата ръководна нишка в набелязването на връзки от този тип. Трета отлика на настоящия текст е свързана с използването на така наречените „комутативни диаграми". Те са специфично за теорията на категориите средство за онагледяване на изпълнеността на определени съотношения, предоставените от което възможности рядко биват използвани в пълния им обем. Дори техният откривател Мак Лейн ги прилага относително рядко в известната си монография (Mac Lane 1971) за сметка на съответните алгебрични изрази. Без съмнение, причините за това са отчасти технически, тъй като относително доскоро средствата за тяхното възпроизвеждане бяха силно ограничени. Стремял съм се да се възползвам максимално от напредъка в тази област, поради което тук ще срещнете повече графични изображения, отколкото в който и да било друг текст, посветен на същата тема. Това ни дава рядката възможност да „видим" истинността на твърдението, което доказваме, да получим интуитивен достъп до нея[5].

Изложението е разделено на пет глави, всяка от които е снабдена с уводна част, представяща накратко нейното съдържание и заключителна част, която резюмира концептуалните моменти, набелязани в предшестващите я страници. Първата половина на *първа глава* има въвеждащ характер и без съществени последици може да бъде пропусната от онези, които се интересуват от самата математическа теория, а не от нейната история или философски интерпретации. Във втората половина на същата глава е въведена аксиоматична дефиниция на понятието за категория, а след това тя е анализирана с помощта на вече споменатите комутативни диаграми. Във *втора глава* разглеждам свойствата и разновидностите на използваното в теорията на категориите обобщение на понятието за функция - „морфизъм". С негова помощ въвеждам някои типични построения и релации между морфизми, а различаването на три основни типа морфизми (мономорфизми, епиморфизми и изоморфизми) ми позволява да въведа едно често използвано в математиката допускане - аксиомата за избора. *Трета глава* е посветена на понятието за „декартово затворена категория" - категория с определена вътрешна структура, зададена посредством обекти, дефинирани чрез така наречените универсални свойства. Такива са „краен обект", „произведение", „изравнител", „разслоено произведение" и „степен". Декартово затворените категории позволяват експлицирането на много понятия от елементарната математика и разкриват неподозирани връзки между наглед несвързани една с друга теории. Следващата, *четвърта глава*, изследва така наречените „топоси" - декартово затворени категории, които позволяват формализирането на практически всички разсъждения, използвани в класическата математика. Този тип категории имат собствено присъщо логическо съдържание и позволяват въвеждането на различни типове логически константи (пропозиционални конективи, модалности, квантори). Техните възможности са онагледени чрез извеждането на редица класически резултати като теоремите на Кантор, Гьодел и Тарски. Последната, *пета глава*, е посветена на висшата теория на категориите, в която предмет на разглеждане са не обектите и морфизмите в отделно взета категория, а отношенията между различни категории, зададени чрез запазващи структурата им изображения, наречени „функтори". По

---

[4] Тук е мястото да уточня въпроса за авторството на приведените в текста доказателства. Те могат да бъдат разделени в четири почти равночислени групи: (1) такива, които съм взаимствал изцяло от някой от текстовете, изброени в библиографията в края на книгата; (2) такива, за които съм разполагал с достатъчно подробни указания и съответно приносът ми е минимален - например в онагледяването на определени твърдения чрез комутативни диаграми; (3) такива, по отношение на които са били приведени схематични инструкции, към които съм се придържал; (4) такива, които съм построил самостоятелно. Разбира се, вероятността за поява на грешки или неточности е най-голяма по отношение на последната група.

[5] За завръщането към идеята за нагледния характер на математическото мислене, вж. Mancosu, P. 2005. Visualization in logic and mathematics. In: Mancosu, P. (ed.) *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, pp. 13-30. Dordrecht: Springer.

повод на това са разгледани и „естествените трансформации“, преобразуващи един функтор в друг, както и съответните функторни категории. Анализирани са и редица фундаментални понятия като „представимост“, „еквивалентност“, „прилежание“ и „монада“. Изложението завършва с обсъждане на структурата на категорията на категориите и възможностите за нейното използване като основа на цялата математика. В заключителния параграф са илюстрирани предимствата на използвания тук подход, като са приведени абстрактни експликации на понятията „математическа теория“ и „логика“.

Обръщайки поглед назад ми се струва, че запознанството с теорията на категориите ни предоставя достатъчно адекватна представа за съвременната абстрактна математика и нейния концептуален характер. Тъкмо в това следва да бъде търсено нейното по-общо значение, както и втората част от отговора на въпроса „Защо тази книга си струва да бъде прочетена?“. Следвайки една древна, но все по-лишена от основания традиция, продължаваме да разглеждаме математиката като теория със свой собствен предмет, като наука, която се занимава с определен тип „неща“. От друга страна, последователно прилагащата методите на аксиоматизацията и формализацията съвременна математика изследва не конкретни обекти, а абстрактни структури. Изявявайки този факт, теорията на категориите нагледно демонстрира ограничеността на традиционните подходи във философията на математиката, които не просто не дават правдоподобни отговори на фундаменталните въпроси за статута на математическите обекти и същността на математическото познание, а дори не позволяват поставянето на част от най-важните нерешени въпроси. От методологическа гледна точка, тя е полезно допълнение към стандартните теоретико-множествени реконструкции, тъй като представя математиката като неспирно разрастваща се мрежа от идеи, понятия и методи, чието единство не се дължи на дълбоката им предметна основа, а е изработено чрез прилагането на утвърден в продължение на много столетия набор от концептуални инструменти. В този смисъл, теорията на категориите отмахва част от булото на теоретичните идеализации и ни позволява да надникнем в лабораторията на работещия математик, като ни въвежда в един важен аспект на неговата теоретична практика. В крайна сметка, това е *единственият* възможен начин, по който можем да добием адекватно понятие за същността на математиката. За да разберат какво е математиката, философите трябва да спрат да бъдат „шофьори от задната седалка“ (според сполучливия израз на Джоузеф Агаси), преповтаряйки утвърдени още от времето на Платон и Аристотел методологични мантри и обсъждайки въпроси, лишени от актуално значение. В този смисъл, основното убеждение, което ме е ръководело по време на писането на настоящата книга, е, че философията на математиката е възможна само като вътрешно присъща част на самата математика.

Накрая, не бих могъл да пропусна да благодаря на онези хора и институции, които направиха написването на тази книга възможно. Първоначален неин вариант беше разработен в качеството на планов изследователски проект към бившия Институт за философски изследвания към Българската Академия на Науките (настоящ Институт за изследване на обществата и знанието). При обсъждането му полезни въпроси и коментари получих от доц. Васил Пенчев, проф. Веселин Петров и проф. Мартин Табаков. Благодаря и на рецензентите, доц. Доротея Ангелова и доц. Николай Обрешков, чиято подкрепа беше много важна за мен. Признателен съм също на Иван Пунчев, чийто ентусиазъм в търсенето на пресечни точки между философията и математиката беше изключително заразителен.Понататък, както е лесно забележимо, за оформлението на текста е използван LaTeX 2_ε, заедно с редица стандартни програмни разширения, разработени от Американското математическо общество. Окончателният си вид той придоби благодарение на вещата намеса на Любен Козарев и Румен Хараламбиев от „Изток-Запад“. Комутативните диаграми в рамките на текста са изготвени с помощта на *XY-Pic*, а онези, които са обособени в отделни фигури - чрез *PSTricks*. Накрая, но не и по важност, бих искал да посветя тази книга на съпругата си Ина - тя прояви неприсъща за нея търпимост към заниманията ми с абстрактни безсмислици, които обхванаха толкова голяма част от съвместното ни съществуване.

София, 2 юли 2013 г.

Съдържание